Hoofdstuk 12: Differentiëren.

12.1 De afgeleide functie

Opgave 1:

a. $\Delta K = 70 - 40 = 30$

$\frac{\Delta K}{\Delta q} = \frac{30}{20} = 1{,}5$ dus € 1,50 per kg

het is de rc van lijn AB

b. nemen toe

c. $rc_k = \frac{\Delta K}{\Delta q} = \frac{50}{20} = 2{,}5$ dus € 2,50 per kg

de snelheid is de rc van lijn k

Opgave 2:

a. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-0}{1--4} = \frac{2}{5}$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4-8}{4--2} = -2$

b. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4--4}{6-4} = 4$

c. neem $y_1 = 0{,}15x^3 - 0{,}45x^2 - 2{,}9x + 5{,}2$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1(5) - y_1(0)}{5-0} = \frac{-1{,}8 - 5{,}2}{5-0} = -1{,}4$

d. $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=5} = 3{,}85$

e. $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=-3} = 3{,}85$

f. $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=3} = -1{,}55$

Opgave 3:

a. neem $y_1 = 0{,}1x^3 - 3x^2 + 50x + 50$

$\left[\frac{dK}{dq}\right]_{q=8} = 21{,}2$

b. $\left[\frac{dK}{dq}\right]_{q=14} = 24{,}8$ dus € 24,80 per stuk

c. afnemende stijging en toenemende stijging

d. dat is voor $q = 10$

Opgave 4:

a. neem $y_1 = x^2$

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=3} = 6$$

b.

x-coördinaat punt	-3	-2	-1	0	1	2	3
helling in punt	-6	-4	-2	0	2	4	6

c. $y = 2x$

d. $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=36} = 72$

Opgave 5:

a. $f(x) = 5x^6 - 5x^3 + 2x^2 - 7$

$f'(x) = 30x^5 - 15x^2 + 4x$

b. $g(x) = 0{,}001x^3 + x^2 - x + 0{,}34$

$g'(x) = 0{,}003x^2 + 2x - 1$

c. $h(t) = -0{,}2t^4 + 0{,}5t^2 - t + 0{,}8$

$h'(t) = -0{,}8t^3 + t - 1$

d. $k(x) = 8x^3 + 3a^8$

$k'(x) = 24x^2$

Opgave 6:

a. $\frac{d}{dx}(7x^4 - a^3) = 28x^3$

b. $\frac{d}{da}(7x^4 - a^3) = -3a^2$

c. $\frac{d(5x-8)^2}{dx} = \frac{d(25x^2 - 80x + 64)}{dx} = 50x - 80$

d. $\frac{d}{dq}(q^3 - 5pq) = 3q^2 - 5p$

e. $\frac{d}{da}(a+4)^2 = \frac{d}{da}(a^2 + 8a + 16) = 2a + 8$

f. $\frac{d((p+3)(p-2))}{dp} = \frac{d(p^2 + p - 6)}{dp} = 2p + 1$

Opgave 7:

a. $f(x) = (3x+2)(6x-4) = 18x^2 - 8$

$f'(x) = 36x$

b. $g(x) = (2x-9)^2 = 4x^2 - 36x + 81$

$g'(x) = 8x - 36$

c. $h(x) = 6(x+2)^2 - 5(x+1) = 6(x^2 + 4x + 4) - 5x - 5 = 6x^2 + 24x + 24 - 5x - 5$

$= 6x^2 + 19x + 19$

$h'(x)=12x+19$

d. $k(x)=8x^6+8a-3a^2$

$k'(x)=48x^5$

e. $l(x)=(2x+4)(5-a)=10x-2ax+20-4a$

$l'(x)=10-2a$

f. $m(x)=5x^4+6a-8a^4$

$m'(x)=20x^3$

Opgave 8:

a. $f'(x)=-2x+4$

b. $y_A=f(3)=3$

$f'(3)=-2$

c. $f'(2)=-2\cdot 2+4=0$

punt B is de top van de grafiek van f

Opgave 9:

a. $g'(x)=4x+3$

$g'(3)=15$

$y_A=g(3)=27$

$k:\quad y=15x+b$ door $(3,27)$

$27=45+b$

$b=-18$

$k:\quad y=15x-18$

b. $g'(1)=7$

$y_B=5$

$l:\quad y=7x+b$ door $(1,5)$

$5=7+b$

$b=-2$

$l:\quad y=7x-2$

Opgave 10:

a. $h'(x)=3x^2-4x+1$

$h'(-2)=21$

$y_A=h(-2)=-15$

$k:\quad y=21x+b$ door $(-2,-15)$

$-15=-42+b$

$b=27$

$k:\quad y=21x+27$

b. $B(0,3)$

$h'(0)=1$

$l:\quad y=x+b$ door $(0,3)$

$b=3$

$l:\quad y=x+3$

Opgave 11:

$-x^2+6x=0$

$-x(x-6)=0$

$x=0 \quad \vee \quad x=6$

$f'(x)=-2x+6$

$f'(6)=-6$

$k: \quad y=-6x+b$ door $(6,0)$

$\quad 0=-36+b$

$\quad b=36$

$k: \quad y=-6x+36$

Opgave 12:

a. $f(x)=5(x^2-3)(2x-4)=5(2x^3-4x^2-6x+12)=10x^3-20x^2-30x+60$

$f'(x)=30x^2-40x-30$

b. $f'(3)=120$

c. $y_A=f(1)=20$

$f'(1)=-40$

$k: \quad y=-40x+b$ door $(1,20)$

$\quad 20=-40+b$

$\quad b=60$

$k: \quad y=-40x+60$

d. $P(0,60)$

$f'(0)=-30$

$m: \quad y=-30x+b$ door $(0,60)$

$\quad b=60$

$m: \quad y=-30x+60$

Opgave 13:

a. $f(x)=ax=ax^1$

$f'(x)=1\cdot a\cdot x^0=1\cdot a\cdot 1=a$

$g(x)=c=c\cdot 1=c\cdot x^0$

$g'(x)=0\cdot c\cdot x^{-1}=0$

b. ze heeft de afgeleide nog een keer gedifferentieerd

c. het is geen vergelijking

ze moet opschrijven $f'(x)=4x^3-3$

12.2 De afgeleide van $y = ax^n$

Opgave 14:

a. $\frac{10}{x^3} = 10x^{-3}$

b. $8 \cdot \sqrt[3]{x} = 8x^{\frac{1}{3}}$

c. $\frac{2}{x} = 2x^{-1}$

d. $\frac{7}{\sqrt{x}} = \frac{7}{x^{\frac{1}{2}}} = 7x^{-\frac{1}{2}}$

e. $4x\sqrt{x} = 4x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} = 4x^{1\frac{1}{2}}$

f. $\frac{3}{4x^2\sqrt{x}} = \frac{3}{4x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{4x^{2\frac{1}{2}}} = \frac{3}{4}x^{-2\frac{1}{2}}$

Opgave 15:

a. $f(x) = \frac{6}{x^3} + 6x^3 = 6x^{-3} + 6x^3$

$f'(x) = -18x^{-4} + 18x^2 = -\frac{18}{x^4} + 18x^2$

b. $g(x) = 3x^6 - \frac{4}{x} = 3x^6 - 4x^{-1}$

$g'(x) = 18x^5 + 4x^{-2} = 18x^5 + \frac{4}{x^2}$

c. $k(q) = \frac{1}{q} = q^{-1}$

$k'(q) = -q^{-2} = -\frac{1}{q^2}$

d. $l(p) = \frac{2}{p} + \frac{1}{2p^2} = 2p^{-1} + \frac{1}{2}p^{-2}$

$l'(p) = -2p^{-2} - p^{-3} = -\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^3}$

e. $h(x) = 3x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} = 3x^{1\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}$

$h'(x) = 4\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} = 4\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = 4\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

f. $m(t) = 12t \cdot \sqrt[4]{t} = 12t^{1\frac{1}{4}}$

$m'(t) = 15t^{\frac{1}{4}} = 15 \cdot \sqrt[4]{t}$

Opgave 16:

a. $\frac{d}{dx}(x + \frac{4}{\sqrt{x}}) = \frac{d}{dx}(x + 4x^{-\frac{1}{2}}) = 1 - 2x^{-1\frac{1}{2}} = 1 - \frac{2}{x\sqrt{x}}$

b. $\frac{d}{dx}(3x^2 \cdot \sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(3x^{2\frac{1}{2}}) = 7\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}} = 7\frac{1}{2}x\sqrt{x}$

c. $\frac{d}{dx}(3x - x^{-1,65}) = 3 + 1{,}65x^{-2,65}$

d. $\frac{d}{dx}(10 \cdot \sqrt[5]{x} + \frac{5}{x}) = \frac{d}{dx}(10x^{\frac{1}{5}} + 5x^{-1}) = 2x^{-\frac{4}{5}} - 5x^{-2} = \frac{2}{\sqrt[5]{x^4}} - \frac{5}{x^2}$

e. $\frac{d}{dx}(\frac{2}{5x} + \frac{5x}{2}) = \frac{d}{dx}(\tfrac{2}{5}x^{-1} + 2\tfrac{1}{2}x) = -\tfrac{2}{5}x^{-2} + 2\tfrac{1}{2} = -\frac{2}{5x^2} + 2\tfrac{1}{2}$

f. $\frac{d}{dx}((1+x)\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(\sqrt{x} + x\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}} + x^{1\frac{1}{2}}) = \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 1\tfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1\tfrac{1}{2}\sqrt{x}$

Opgave 17:

a. $y_A = \tfrac{1}{2}$

$y = \frac{2}{x} = 2x^{-1}$

$y' = -2x^{-2} = -\frac{2}{x^2}$

$y'(4) = -\tfrac{1}{8}$

b. $y'(1) = -2$

c. $y'(5) = -\tfrac{2}{25}$

Opgave 18:

a. $10 \cdot \sqrt{x} - 5x = 0$

$10 \cdot \sqrt{x} = 5x$

$100x = 25x^2$

$100x - 25x^2 = 0$

$25x(4 - x) = 0$

$x = 0 \quad \vee \quad x = 4$

$f'(x) = 5x^{-\frac{1}{2}} - 5 = \frac{5}{\sqrt{x}} - 5$

$f'(4) = -2\tfrac{1}{2}$

b. $f'(\tfrac{1}{4}) = \frac{5}{\sqrt{\tfrac{1}{4}}} - 5 = \frac{5}{\tfrac{1}{2}} - 5 = 10 - 5 = 5$

c. $f'(1) = \frac{5}{\sqrt{1}} - 5 = 5 - 5 = 0$ dus de raaklijn loopt horizontaal

Opgave 19:

a. $y = \frac{2}{x} + 2x = 2x^{-1} + 2x$

$y'(x) = -2x^{-2} + 2 = -\frac{2}{x^2} + 2$

$y'(4) = -\tfrac{2}{16} + 2 = 1\tfrac{7}{8}$

b. $y'(0{,}5) = -\tfrac{2}{0{,}25} + 2 = -8 + 2 = -6 < 0$

c. $y'(1) = -\tfrac{2}{1} + 2 = 0$ dus de raaklijn loopt horizontaal

Opgave 20:

a. $f(x)=x+\dfrac{1}{x}=x+x^{-1}$

$f'(x)=1-x^{-2}=1-\dfrac{1}{x^2}=0$

$1=\dfrac{1}{x^2}$

$x^2=1$

$x=1 \quad \vee \quad x=-1$

max $f(-1)=-2$

min $f(1)=2$

b. $y_A=4\frac{1}{4}$

$f'(4)=\frac{15}{16}$

$k: \quad y=\frac{15}{16}x+b$ door $(4,4\frac{1}{4})$

$4\frac{1}{4}=\frac{15}{4}+b$

$b=\frac{1}{2}$

$k: \quad y=\frac{15}{16}x+\frac{1}{2}$

c. $f'(0,5)=1-\dfrac{1}{0,25}=1-4=-3$

d. $f'(0,2)=1-\dfrac{1}{0,04}=1-25=-24<0$

e. $a=2 \quad \vee \quad a=-2$

Opgave 21:

a. $y=8-\dfrac{16}{x}+\dfrac{24}{x^2}=8-16x^{-1}+24x^{-2}$

$y'=16x^{-2}-48x^{-3}=\dfrac{16}{x^2}-\dfrac{48}{x^3}=0$

$\dfrac{16}{x^2}=\dfrac{48}{x^3}$

$16x^3=48x^2$

$16x^3-48x^2=0$

$16x^2(x-3)=0$

$x=0 \quad \vee \quad x=3$

k.n. $\qquad y=5\frac{1}{3}$

dus $A(3,5\frac{1}{3})$

b. $y'(-2)=10$

c. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(16x^{-2}-48x^{-3}\right)=-32x^{-3}+144x^{-4}=-\dfrac{32}{x^3}+\dfrac{144}{x^4}$

$-\dfrac{32}{x^3}+\dfrac{144}{x^4}=0$

$\dfrac{144}{x^4}=\dfrac{32}{x^3}$

$32x^4 = 144x^3$
$32x^4 - 144x^3 = 0$
$32x^3(x - 4\frac{1}{2}) = 0$
$x = 0 \quad \vee \quad x = 4\frac{1}{2}$
k.n. dus $x = 4\frac{1}{2}$

d. de snelheid waarmee y verandert wordt gegeven door y' ofwel $\frac{dy}{dx}$

dus de snelheid is maximaal als $\left(\frac{dy}{dx}\right)' = 0$

dat is voor $x = 4\frac{1}{2}$, dan $y = 5{,}63$
dus $B(4{,}5; 5{,}63)$

e. de grafiek moet 3 naar links verschoven worden, dus $a = -3$

Opgave 22:

a. $y_A = 6{,}19$
$y' = 3{,}6x^{-0{,}7} - 3$
$y'(4) = -1{,}64$

b. $y'(0{,}3) = 5{,}36$

c. $3{,}6x^{-0{,}7} - 3 = 0$
$3{,}6x^{-0{,}7} = 3$
$x^{-0{,}7} = \frac{5}{6}$
$x = \sqrt[-0{,}7]{\frac{5}{6}} = 1{,}30$

Opgave 23:

a. $R' = 1{,}6q^{-0{,}6} - 1$
$R'(0{,}5) = 1{,}43$ dus € 1,43 per stuk

b. $R'(4{,}5) = -0{,}35$ dus € 0,35 per stuk

c. $1{,}6q^{-0{,}6} - 1 = 0$
$1{,}6q^{-0{,}6} = 1$
$q^{-0{,}6} = 0{,}625$
$q = 2{,}19$
$R(2{,}19) = 3{,}283$ dus € 3283,-

Opgave 24:

a. $B = 4\sqrt{t} - t = 4t^{\frac{1}{2}} - t$
$B' = 2t^{-\frac{1}{2}} - 1 = \frac{2}{\sqrt{t}} - 1$
$B'(3) = 0{,}15$ dus 0,15 dm² ofwel 15 cm² per maand

b. $B'(4) = \frac{2}{\sqrt{4}} - 1 = 1 - 1 = 0$
$B(4) = 4$ dus 4 dm²

Opgave 25:

a. $t = 8$ geeft $q = 25{,}373$ dus 25373

b. $q' = 6 - 1{,}5t^{0,5}$

$t = 20$ geeft $q' = -0{,}708$ dus een afname van 708 stuks per dag

c. $t = 4$ geeft $q = 16$

$t = 16$ geeft $q = 32$

dus $\frac{32-16}{16} \cdot 100\% = 100\%$ meer

d. als $t = 36$ dan $q = 0$

e. $6 - 1{,}5t^{0,5} = 0$

$-1{,}5t^{0,5} = -6$

$t^{0,5} = 4$

$t = 16$ dus op 28 mei was de verkoop maximaal

$q = 32$ dus 32000 stuks

12.3 Optimaliseren

<u>Opgave 26:</u>

a. $L = 4h + 4 \cdot 2x + 4x = 4h + 12x$

b. $4h + 12x = 9$

$4h = 9 - 12x$

$h = 2\frac{1}{4} - 3x$

<u>Opgave 27:</u>

$L = 3x + 12 + 2y + 3x = 160$

$6x + 12 + 2y = 160$

$2y = 148 - 6x$

$y = 74 - 3x$

$Opp = y \cdot (3x + 12)$

$= (74 - 3x)(3x + 12)$

$= 222x + 888 - 9x^2 - 36x$

$= -9x^2 + 186x + 888$

<u>Opgave 28:</u>

$L = x + y + x + 4 + y - 3 = 80$

$2x + 2y = 79$

$2y = 79 - 2x$

$y = 39{,}5 - x$

$Opp = (x + 10)(y + 3)$

$= (x + 10)(39{,}5 - x + 3)$

$= (x + 10)(42{,}5 - x)$

$= 42{,}5x - x^2 + 425 - 10x$

$= -x^2 + 32{,}5x + 425$

<u>Opgave 29:</u>

a. $A = x \cdot y = 600$

$y = \dfrac{600}{x}$

$Omtrek = 2x + 2y = 2x + 2 \cdot \dfrac{600}{x} = 2x + \dfrac{1200}{x}$

b. $Inh = x^2 h = 10$

$h = \dfrac{10}{x^2}$

$Omtrek = 2x + 2h = 2x + 2 \cdot \dfrac{10}{x^2} = 2x + \dfrac{20}{x^2}$

<u>Opgave 30:</u>

a. $L = x + y + x + 6 = 200$

$y = 194 - 2x$

$Opp = y \cdot (x + 6) = (194 - 2x)(x + 6) = 194x + 1164 - 2x^2 - 12x = -2x^2 + 182x + 1164$

b. $Opp = y \cdot (x+6) = 2000$

$$y = \frac{2000}{x+6}$$

$$L = 2x + y + 6 = 2x + \frac{2000}{x+6} + 6$$

Opgave 31:

a. $L = 4 \cdot 2x + 4x + 4h = 40$

$$12x + 4h = 40$$
$$4h = 40 - 12x$$
$$h = 10 - 3x$$

$Inh = 2x \cdot x \cdot h = 2x^2 \cdot (10 - 3x) = 20x^2 - 6x^3$

b. $Inh = 2x^2 h = 40$

$$h = \frac{20}{x^2}$$

$$P = 4x + 2h = 4x + 2 \cdot \frac{20}{x^2} = 4x + \frac{40}{x^2}$$

Opgave 32:

neem $y_1 = 4\tfrac{1}{2}x^2 - 6x^3$

de optie maximum geeft: $x = 0{,}5$

$Inh = 0{,}375$ dm²

Opgave 33:

$L = 4x + 2y = 400$

$$2y = 400 - 4x$$
$$y = 200 - 2x$$

$Opp = xy = x \cdot (200 - 2x) = 200x - 2x^2$

$Opp' = 200 - 4x = 0$

$$-4x = -200$$
$$x = 50 \text{ dus } y = 100$$

de oppervlakte is maximaal als de afmetingen 100 bij 50 meter zijn

Opgave 34:

$L = 8x + 4h = 12$

$$4h = 12 - 8x$$
$$h = 3 - 2x$$

$Inh = x^2 h = x^2 \cdot (3 - 2x) = 3x^2 - 2x^3$

$Inh' = 6x - 6x^2 = 0$

$$6x(1 - x) = 0$$
$$x = 0 \quad \vee \quad x = 1$$

$x = 1$ dus $h = 1$

dus de afmetingen zijn 1 bij 1 bij 1 meter

Opgave 35:

$h = 3 - 2x$ (zie opgave 34)

$Opp = 4xh = 4x(3-2x) = 12x - 8x^2$
$Opp' = 12 - 16x = 0$
$-16x = -12$
$x = 0{,}75$ dus $h = 1{,}5$
dus de afmetingen zijn: 0,75 bij 0,75 bij 1,5 meter

Opgave 36:
$L = x + y + x - 8 = 200$
$y = 208 - 2x$
$Opp = xy = x(208-2x) = 208x - 2x^2$
$Opp' = 208 - 4x = 0$
$-4x = -208$
$x = 52$ dus $y = 104$
dus de afmetingen zijn: 52 bij 104 meter

Opgave 37:
a. $L = 2(x+3) + 2x + 4h = 26$
$2x + 6 + 2x + 4h = 26$
$4h = 20 - 4x$
$h = 5 - x$
$Inh = x(x+3)h = (x^2 + 3x)(5-x) = 5x^2 - x^3 + 15x - 3x^2 = -x^3 + 2x^2 + 15x$
b. $Inh' = -3x^2 + 4x + 15$
$Inh'(3) = -27 + 12 + 15 = 0$
c. $Inh = 36$ dm³

Opgave 38:
a. $Inh = x^2 h = 12$
$h = \frac{12}{x^2}$
$K = 0{,}5x^2 + 0{,}25x^2 + 4 \cdot 0{,}25 \cdot xh = 0{,}75x^2 + x \cdot \frac{12}{x^2} = 0{,}75x^2 + \frac{12}{x}$
b. $K = 0{,}75x^2 + 12x^{-1}$
$K' = 1{,}5x - 12x^{-2} = 1{,}5x - \frac{12}{x^2} = 0$
$1{,}5x = \frac{12}{x^2}$
$1{,}5x^3 = 12$
$x^3 = 8$
$x = 2$ dus $h = 3$
de kosten zijn minimaal als de afmetingen 2 bij 2 bij 3 meter zijn

Opgave 39:
a. $Inh = 2x \cdot x \cdot h = 72$
$h = \frac{36}{x^2}$

$K = 0{,}4 \cdot 2x \cdot x + 2 \cdot 0{,}2 \cdot 2x \cdot h + 2 \cdot 0{,}2 \cdot x \cdot h = 0{,}8x^2 + 1{,}2xh$

$K = 0{,}8x^2 + 1{,}2x \cdot \dfrac{36}{x^2} = 0{,}8x^2 + \dfrac{43{,}2}{x} = 0{,}8x^2 + \dfrac{126}{5x}$

b. $K' = 1{,}6x - 43{,}2x^{-2} = 1{,}6x - \dfrac{43{,}2}{x^2} = 0$

$1{,}6x = \dfrac{43{,}2}{x^2}$

$1{,}6x^3 = 43{,}2$

$x^3 = 27$

$x = 3$ dus $h = 4$

dus de afmetingen zijn 6 bij 3 bij 4 meter

Opgave 40:

$Inh = x^2 h = 16$

$h = \dfrac{16}{x^2}$

$Opp = x^2 + 4xh = x^2 + 4x \cdot \dfrac{16}{x^2} = x^2 + \dfrac{64}{x}$

$Opp' = 2x - 64x^{-2} = 2x - \dfrac{64}{x^2} = 0$

$2x = \dfrac{64}{x^2}$

$2x^3 = 64$

$x^3 = 32$

$x = \sqrt[3]{32} = 3{,}17\,\text{dm} = 317\,\text{mm}$

$h = 1{,}59\,\text{dm} = 159\,\text{mm}$

dus de afmetingen zijn: 317 bij 317 bij 159 mm

Opgave 41:

a. $Inh = \pi r^2 h = 1000$

$h = \dfrac{1000}{\pi r^2}$

$Opp = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \dfrac{1000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \dfrac{2000}{r}$

b. $Opp' = 4\pi r - 2000 r^{-2} = 4\pi r - \dfrac{2000}{r^2} = 0$

$4\pi r = \dfrac{2000}{r^2}$

$4\pi r^3 = 2000$

$r^3 = \dfrac{500}{\pi}$

$r = 5{,}4\,\text{cm} = 54\,\text{mm}$

$h = 10{,}8\,\text{cm} = 108 mm$

12.4 Formules in de economie.

Opgave 42:

a. $K = 0{,}00001q^3 - 0{,}007q^2 + 2{,}1q + 100$

$K' = 0{,}00003q^2 - 0{,}014q + 2{,}1$

$K'(100) = 1$ euro per stropdas

b. $q = 80$ geeft $K = 228{,}32$

$q = 81$ geeft $K = 229{,}49$

$MK = 229{,}49 - 229{,}32 = 1{,}17$

c. $K(100) = 250$

$K(101) = 251$

$MK = 251 - 250 = 1$ euro

de antwoorden zijn gelijk

Opgave 43:

a. $K = 0{,}00012q^3 - 0{,}04q^2 + 10q + 1000$

$MK = K' = 0{,}00036q^2 - 0{,}08q + 10$

b. $R = p \cdot q = (-0{,}1q + 50) \cdot q = -0{,}1q^2 + 50q$

$W = R - K = -0{,}1q^2 + 50q - (0{,}00012q^3 - 0{,}04q^2 + 10q + 1000)$

$= -0{,}1q^2 + 50q - 0{,}00012q^3 + 0{,}04q^2 - 10q - 1000$

$= -0{,}00012q^3 - 0{,}06q^2 + 40q - 1000$

c. $y_1 = -0{,}00012x^3 - 0{,}06x^2 + 40x - 1000$

de optie maximum geeft $x = 206$ dus $q = 206$

$MW = 0$

Opgave 44:

a. $rc = \frac{-6}{120} = -0{,}05$

$p = -0{,}05q + 6$

$R = p \cdot q = (-0{,}05q + 6) \cdot q = -0{,}05q^2 + 6q$

b. $rc = \frac{-6}{60} = -0{,}1$

MR: $p = -0{,}1q + 6$

$\frac{dR}{dq} = -0{,}1q + 6$

c. $-0{,}1q + 6 = 0$

$-0{,}1q = -6$

$q = 60$

voor $q = 60$ is $MR = 0$

d. $W = R - K = -0{,}05q^2 + 6q - (0{,}001q^3 - 0{,}11q^2 + 4{,}5q + 20)$

$= -0{,}05q^2 + 6q - 0{,}001q^3 + 0{,}11q^2 - 4{,}5q - 20$

$= -0{,}001q^3 + 0{,}06q^2 + 1{,}5q - 20$

$y_1 = -0{,}001x^3 + 0{,}06x^2 + 1{,}5x - 20$

de optie maximum geeft $x = 50$ dus $q = 50$

Opgave 45:

a. $q = 20$ geeft $K = 30$ dus $GK = \frac{K}{q} = \frac{30}{20} = 1{,}5$

b. de gemiddelde kosten nemen eerst af en daarna toe
voor ieder punt *P* op de grafiek van *K* kijk je naar de rc van lijnstuk *OP*

c. teken vanuit *O* de raaklijn aan de grafiek van *K*
$q = 32$

Opgave 46:

a. $W(20) = 200$ dus $GW = \frac{200}{20} = 10$
$W(50) = 350$ dus $GW = \frac{350}{50} = 7$

b. $q = 28$
$GW = \frac{330}{28} = 11{,}8$

Opgave 47:

a. $GK = \frac{1000}{2000} = 0{,}5$ euro per pot

b. $GK(4000) = \frac{12000}{4000} = 0{,}3$ euro per pot
teken de lijn door $(0{,}0)$ en $(4000{,}12000)$ deze snijdt de grafiek ook voor $q = 6700$

c. teken door $(0{,}0)$ de raaklijn aan de grafiek, dat geeft $q = 5400$
$GK = \frac{1450}{5400} = 0{,}27$ euro per pot
$MK = 0{,}27$ want de raaklijn heeft $rc = 0{,}27$

d. de rc van de raaklijn is minimaal voor $q = 3000$

Opgave 48:

De raaklijn door $(0{,}0)$ aan de grafiek heeft bij *K* een kleinste en bij *W* een grootste rc.

Opgave 49:

a. $GK = \frac{K}{q} = \frac{2q^2 + 5q + 18}{q} = 2q + 5 + \frac{18}{q}$
$MK = K' = 4q + 5$

b. $GK' = 2 - 18q^{-2} = 2 - \frac{18}{q^2} = 0$
$-\frac{18}{q^2} = -2$
$q^2 = 9$
$q = 3$

c. $GK(3) = 17$
$MK(3) = 17$
de lijn van *GK* is raaklijn aan de grafiek van *K*

Opgave 50:

a. $P(20) = 1600$
$GP(20) = \frac{P(20)}{20} = \frac{1600}{20} = 80$

b. $t = 30$, teken vanuit O de raaklijn aan de grafiek

c. $GP = \dfrac{-2{,}5t^2 + 240t - 2200}{t} = -2{,}5t + 240 - \dfrac{2200}{t}$

$GP' = -2{,}5 + 2200t^{-2} = -2{,}5 + \dfrac{2200}{t^2} = 0$

$\dfrac{2200}{t^2} = 2{,}5$

$t^2 = 880$

$t = 29{,}7$

$GP = 91{,}7$ m³/ha

Opgave 51:

a. $K_B = 4 \cdot 35 = 140$ euro

b. gemiddelde voorraad $= \frac{180+0}{2} = 90$ accu's

$K_V = 90 \cdot 3 = 270$ euro

c. $K_{tot} = K_B + K_V = 140 + 270 = 410$

d. $K_B = 12 \cdot 35 = 420$

gemiddelde voorraad $= 30$

$K_V = 30 \cdot 3 = 90$

$K_{tot} = 420 + 90 = 510$

e. per bestelling $\frac{720}{36} = 20$ accu's

$K_B = 36 \cdot 35 = 1260$

gemiddelde voorraad $= \frac{20}{2} = 10$ accu's

$K_V = 10 \cdot 3 = 30$

$K_{tot} = 1260 + 30 = 1290$

Opgave 52:

a. stel per jaar n bestellingen, dan per bestelling $\dfrac{1200}{n}$ pakken

$K_B = 40n$

gemiddelde voorraad $= \dfrac{600}{n}$

$K_V = \dfrac{600}{n} \cdot 4 = \dfrac{2400}{n}$

$TK = K_B + K_V = 40n + \dfrac{2400}{n}$

b. $TK' = 40 - 2400n^{-2} = 40 - \dfrac{2400}{n^2} = 0$

$-\dfrac{2400}{n^2} = -40$

$n^2 = 60$

$n = 8$

c. $TK = 620$

Opgave 53:

a. stel per jaar n bestellingen, dan per bestelling $\frac{360}{n}$ koelkasten

$K_B = 5n + 3 \cdot 360 = 5n + 1080$

gemiddelde voorraad $= \frac{180}{n}$

$K_V = 20 \cdot \frac{180}{n} = \frac{3600}{n}$

$TK = K_B + K_V = 5n + 1080 + \frac{3600}{n}$

b. neem $y_1 = 5x + 1080 + \frac{3600}{x}$

de optie minimum geeft $x = 26{,}8$

dus per jaar 27 bestellingen, per bestelling 13 of 14 koelkasten

Opgave 54:

a. startkosten: $1000n$

productiekosten: $5000 \cdot 40 = 200000$

per keer $\frac{5000}{n}$ stofzuigers, dus de gemiddelde voorraad is: $\frac{2500}{n}$

voorraadkosten: $10 \cdot \frac{2500}{n} = \frac{25000}{n}$

$TK = \frac{25000}{n} + 1000n + 200000$

b. $TK' = -25000n^{-2} + 1000 = -\frac{25000}{n^2} + 1000 = 0$

$-\frac{25000}{n^2} = -1000$

$n^2 = 25$

$n = 5$

$TK(5) = 210000$ euro

12.5 De kettingregel

Opgave 55:

a. $p = 2 \quad A = 20$

b. $p = 10 \quad A = 500$

Opgave 56:

a. $y = 5(2x+3)^4 + 1$

b. $y = 4\sqrt{3x-1}$

c. $y = \dfrac{18}{x^2 - 6}$

d. $y = 3(5-x)^4$

e. $y = 2\sqrt{x^3 + 2} + 3$

f. $y = 2^{5x-3}$

Opgave 57:

a. $y = 2(3x-7)^2$

$y = 2u^2$ met $u = 3x - 7$

b. $y = 5\sqrt{3x+1}$

$y = 5\sqrt{u}$ met $u = 3x + 1$

c. $y = 2{,}5(4x+7{,}1)^{1{,}6}$

$y = 2{,}5u^{1{,}6}$ met $u = 4x + 7{,}1$

d. $y = 6(x^2+1)^3 - 8$

$y = 6u^3 - 8$ met $u = x^2 + 1$

e. $y = \dfrac{5}{(3x+2)^2}$

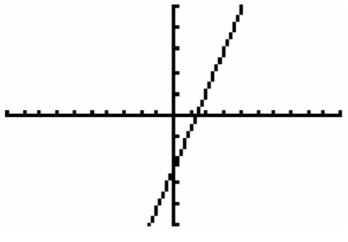
$y = \dfrac{5}{u^2}$ met $u = 3x + 2$

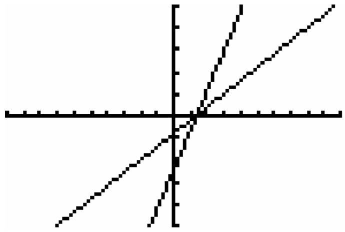
f. $y = 8 - 3\sqrt{5 - x^2}$

$y = 8 - 3\sqrt{u}$ met $u = 5 - x^2$

Opgave 58:

a.



b. 

c. $y=(3x-4)^2=9x^2-24x+16$

$\frac{dy}{dx}=18x-24$

d. factor 3

Opgave 59:

a. $y=-3(2x-5)^6=-3u^6$ met $u=2x-5$ dus $u'=2$

$y'=-18u^5\cdot u'=-18(2x-5)^5\cdot 2=-36(2x-5)^5$

b. $y=(x-4x^2)^5=u^5$ met $u=x-4x^2$ dus $u'=1-8x$

$y'=5u^4\cdot u'=5(x-4x^2)^4\cdot(1-8x)$

c. $y=\frac{8}{(3x+2)^4}=8(3x+2)^{-4}=8u^{-4}$ met $u=3x+2$ dus $u'=3$

$y'=-32u^{-5}\cdot u'=-32(3x+2)^{-5}\cdot 3=-\frac{96}{(3x+2)^5}$

d. $y=2\sqrt{3-7x}=2\sqrt{u}=2u^{\frac{1}{2}}$ met $u=3-7x$ dus $u'=-7$

$y'=u^{-\frac{1}{2}}\cdot u'=(3-7x)^{-\frac{1}{2}}\cdot -7=-\frac{7}{\sqrt{3-7x}}$

e. $y=\frac{4}{(2-x^2)^3}=4(2-x^2)^{-3}=4u^{-3}$ met $u=2-x^2$ dus $u'=-2x$

$y'=-12u^{-4}\cdot u'=-12(2-x^2)^{-4}\cdot -2x=\frac{24x}{(2-x^2)^4}$

f. $y=\sqrt{3+x^2}=\sqrt{u}=u^{\frac{1}{2}}$ met $u=3+x^2$ dus $u'=2x$

$y'=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\cdot u'=\frac{1}{2}(3+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{3+x^2}}$

Opgave 60:

a. $S=\frac{2}{(3-a^2)^5}=\frac{2}{u^5}=2u^{-5}$ met $u=3-a^2$ dus $u'=-2a$

$S'=-10u^{-6}\cdot u'=-10(3-a^2)^{-6}\cdot -2a=\frac{20a}{(3-a^2)^6}$

b. $K=\sqrt{2q+1}=\sqrt{u}=u^{\frac{1}{2}}$ met $u=2q+1$ dus $u'=2$

$K'=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\cdot u'=\frac{1}{2}(2q+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2=\frac{1}{\sqrt{2q+1}}$

c. $W=6(p^2-2p+5)^{0,7}=6u^{0,7}$ met $u=p^2-2p+5$ dus $u'=2p-2$

$W'=4{,}2u^{-0,3}\cdot u'=4{,}2(p^2-2p+5)^{-0,3}\cdot(2p-2)$

Opgave 61:

a. $y = (5q+2)^4 - 3q + 1$

$y' = 4(5q+2)^3 \cdot 5 - 3 = 20(5q+2)^3 - 3$

b. $y = \dfrac{5}{(x+1)^8} + 4x^2 = 5(1+x)^{-8} + 4x^2$

$y' = -40(1+x)^{-9} \cdot 1 + 8x = -\dfrac{40}{(1+x)^9} + 8x$

Opgave 62:

a. $TK = 1000\sqrt{q^3+10} = 1000\sqrt{u} = 1000u^{\frac{1}{2}}$ met $u = q^3 + 10$ dus $u' = 3q^2$

$TK' = 500u^{-\frac{1}{2}} \cdot u' = 500(q^3+10)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3q^2 = \dfrac{1500q^2}{\sqrt{q^3+10}}$

$TK'(35) = 8873$ euro

b. $W = R - TK = -700(q^2 - 30q + 70) - 1000\sqrt{q^3+10}$

$W' = -700(2q-30) - \dfrac{1500q^2}{\sqrt{q^3+10}} = 0$

neem $y_1 = -700(2x-30) - \dfrac{1500x^2}{\sqrt{x^3+10}}$

de optie zero geeft $x = 11{,}4$ dus $q = 11{,}4$

Opgave 63:

$p = \sqrt{12500 - 25q} = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$ met $u = 12500 - 25q$ dus $u' = -25$

$p' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot u' = \frac{1}{2}(12500-25q)^{-\frac{1}{2}} \cdot -25 = -\dfrac{12{,}5}{\sqrt{12500-25q}}$

$p'(250) = -0{,}16$ euro per stuk